Κατασκευή Fractals με ΣΕΣ (IFS)

Νικόλαος Βλάχος

Χρήστος Κρητικός

Τι θα δούμε;

- Θεώρημα Σταθερού Σημείου
- Θα δούμε την κατασκευή γνωστών fractal συνόλων με Συστήματα Επαναμβαλόμενων Συναρτήσεων
- Σύνολο Cantor, καμπύλη Van Koch, τρίγωνο Sierpinski
- Κατασκευή ενός δικού μας fractal

Θεώρημα Σταθερού Σημείου

Έστω X πλήρης μετρικός υπόχωρος του Ευκλείδειου χώρου $|R^d$ και w_n, n = {1, 2, …, N} συναρτήσεις συστολής του X.

Η συνάρτηση συστολής W: H(X) → H(X) με **$W(B) = w_1(B) \cup w_2(B) \cup \ldots \cup w_N(B)$**

έχει **μοναδικό σταθερό σημείο A∊H(X)**

Θεώρημα Σταθερού Σημείου II

- Προκύπτουν τα εξής σημαντικά πορίσματα:

  Αν W συστολή με συντελεστή s και $W_n = W \circ \ldots \circ W$, n φορές

  – **A = limW^n(B)** για κάθε B∊H(X) καθώς $n \to \infty$

  – Αν $x_0 \in X$ και $x_{n+1} = W^n(x_n)$ ισχύει η ανισότητα:

$$\mathbf{d(x^*, x_n) \leq [s_n/(1-s)] \cdot d(x_1, x_0)}$$

  όπου x* το σταθερό σημείο της W

Θεώρημα Σταθερού Σημείου ΙΙΙ

- Τα fractal σύνολα κατασκευάζονται με την κατάλληλη επιλογή των συναρτήσεων συστολής
- Το σχήμα που προκύπτει είναι το όριο της ακολουθίας W^n

Συστολές "διάσημων" fractal συνόλων -

- Σύνολο Cantor
  - $w_1(x) = (1/3) \cdot x$
  - $w_2(x) = (1/3) \cdot x + (2/3)$
- Αν το αναπαραστήσουμε σε πίνακα 2x2 επειδή θα το σχεδιάσουμε στο επίπεδο

$$w_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad w_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Σύνολο Cantor II

- Αν υποθέσουμε πως ξεκινάμε από ένα σημείο (π.χ το 0) τότε έχουμε 2 συστολές
  - Η μία σμίκρυνση κατά 1/3
  - Η άλλη σμίκρυνση κατά 1/3 και μεταφορά κατά 2/3
- Άρα το σημείο 0 παράγει τα σημεία 0 και 2/3 στο 1^{ο} βήμα
- Χρησιμοποιούμε τα παραγόμενα αυτά σημεία για τη δημιουργία των επόμενων σημείων στο 2^{ο} βήμα

Σύνολο Cantor – Βήμα 1ο

Σύνολο Cantor – Βήμα 2ο

Σύνολο Cantor – Βήμα 3ο

Συστολές “διάσημων” fractal συνόλων ΙΙ

- Καμπύλη Koch
- Αν το αναπαραστήσουμε σε πίνακα 2x2 επειδή θα το σχεδιάσουμε στο επίπεδο

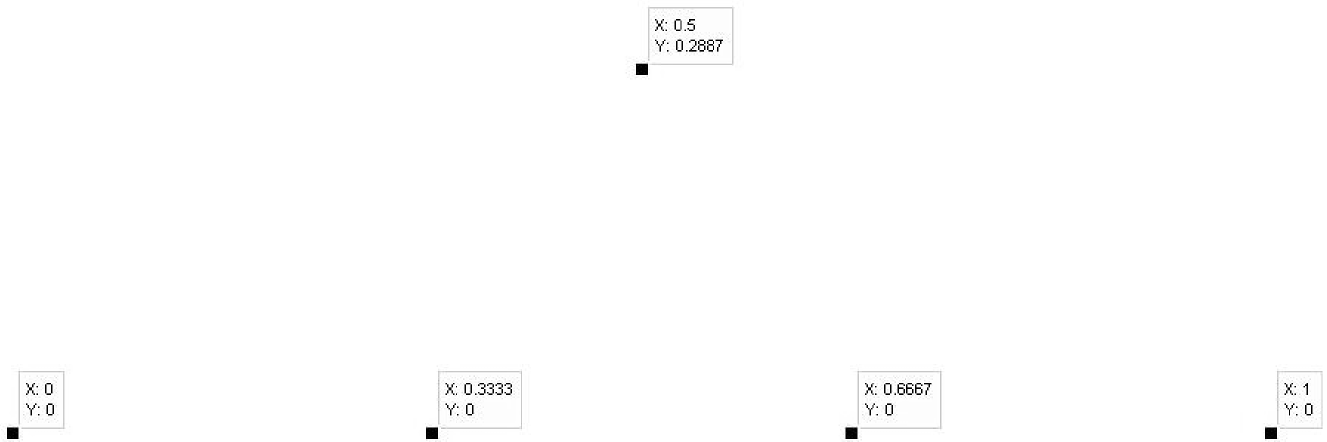
$$w_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad w_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{-\sqrt{3}}{6} \\ \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$w_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{\sqrt{3}}{6} \\ \frac{-\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2\sqrt{3}} \end{pmatrix} \qquad w_4 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Καμπύλη Koch

- Αν υποθέσουμε πως ξεκινάμε από ένα σημείο π.χ το (0,0) τότε έχουμε 4 συστολές
  - Μια σμίκρυνση κατά 1/3
  - Μια σμίκρυνση κατά 1/3 και μεταφορά του x κατά 2/3
  - Μία σμίκρυνση κατά 1/3, στροφή κατά π/3 και μεταφορά του x κατά 1/3
  - Μία σμίκρυνση κατά 1/3, στροφή κατά – π/3 και μεταφορά του y κατά 1/2√3
- Άρα το σημείο (0,0) παράγει τα σημεία (0,0), (1/3,0), (1/2,√3/6) και (2/3,0) στο 1$^{\text{ο}}$ βήμα
- Χρησιμοποιούμε τα παραγόμενα αυτά σημεία για τη δημιουργία των επόμενων σημείων στο 2$^{\text{ο}}$ βήμα

Καμπύλη Koch – Βήμα $1^{ο}$
για δύο αρχικά σημεία: (0,0) και (1,0)



Τρίγωνο Sierpinski

$$w_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$w_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$w_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$